一、集合部分

1.集合相关

(1)集合性质：确定性、互异性、无序性

(2)n个元素集合有2^n个子集，有2^n-1个真子集，有2^n-2个非空真子集

(3)空集是任何一个集合的子集，是一切非空集合的真子集

(4)交集"$\cap$"；并集"$\cup$"；补集"C_U^A"

交：$A\cap B \Leftrightarrow \{x \mid x\in A, 且 x\in B\}$　并：$A\cup B \Leftrightarrow \{x \mid x\in A 或 x\in B\}$　补：$C_U A \Leftrightarrow \{x\in U, 且 x\notin A\}$

(5)$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A \Leftrightarrow A\cup B = B;$ 注意：讨论的时候不要遗忘了$A=\phi$的情况

(6)$C_I(A\cup B)=(C_I A)\cap(C_I B); C_I(A\cap B)=(C_I A)\cup(C_I B);$

二、函数、导数

1.函数的单调性

(1)设x_1、$x_2\in[a,b], x_1<x_2$那么

$f(x_1)-f(x_2)<0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数；$f(x_1)-f(x_2)>0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数

(2)设函数$y=f(x)$在某个区间内可导，

若$f'(x)>0$，则$f(x)$为增函数；若$f'(x)<0$，则$f(x)$为减函数。

2.函数的奇偶性

(1)定义：对于定义域内任意的x，若$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$是偶函数；若$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$是奇函数。

(2)奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称。

奇函数 $f(x)$ 在原点有定义，则 $f(0)=0$

3.函数的周期性：若 $f(x+T)=f(x)$，则 T 叫做这个函数的一个周期。(差为定值想周期)

(1)三角函数的最小正周期：

$$y=A\sin(\omega x+\varphi), y=A\cos(\omega x+\varphi): T=\frac{2\pi}{|\omega|}；\quad y=\tan\omega x: T=\frac{\pi}{|\omega|}$$

4.两个函数图象的对称性(和为定值想对称)

(1)如果函数 $y=f(x)$ 对于一切 $x\in R$，都有 $f(a+x)=f(a-x)$，那么函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow y=f(x+a)$ 是偶函数；

(2)若都有 $f(a-x)=f(b+x)$，那么函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称；

5.极值、最值(极值点处的导数值为零，最值只在极值点处或端点处)

求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法是：解方程 $f'(x)=0$.当 $f'(x_0)=0$ 时：

(1)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值；

(2)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

6.图象变换问题

(1)平移变换：i) $y=f(x)\to y=f(x\pm a)$，$(a>0)$———左“+”右“－”；

ii) $y=f(x)\to y=f(x)\pm k,(k>0)$ ———上“+”下“－”；

(2)对称变换：

i) $y=f(x)\xrightarrow{(0,0)}y=-f(-x)$；　　ii) $y=f(x)\xrightarrow{x轴}y=-f(x)$；

iii) $y=f(x)\xrightarrow{y轴}y=f(-x)$；　　iv) $y=f(x)\xrightarrow{y=x}x=f(y)$；

(4)导数的四则运算法则：$(u \pm v)' = u' \pm v'; (uv)' = u'v + uv'; (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

(5)导数定义：f(x)在点 x_0 处的导数记作 $y'|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

(6)函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y = f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率 k= $f'(x_0)$，相应的切线方程是 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

原函数图象只看升降判增减；导函数图象只看上下定正负

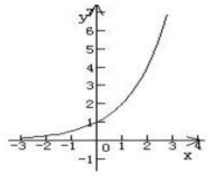
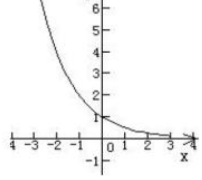
9.二次函数：(1)解析式：①一般式：$f(x) = ax^2 + bx + c$；

②顶点式：$f(x) = a(x-h)^2 + k$，(h,k) 为顶点；③零点式：$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (a≠0).

(2)二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴方程是 $x = -\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$。

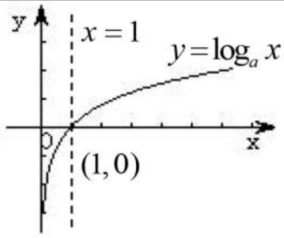
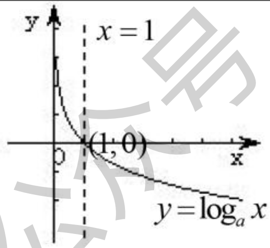
(3)二次函数问题解决需考虑的因素：①开口方向；②对称轴；③判别式；④与坐标轴交点；⑤端点值

10.指数函数图象

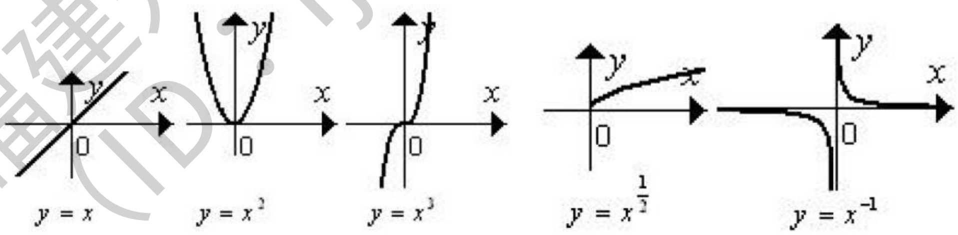
指数函数	$a > 1$，$y = a^x$	$0 < a < 1$，$y = a^x$
图象		
性质	(1)定义域：R	
	(2)值域：$(0, +\infty)$	

	(3)过点 $(0,1)$，即 $x=0$ 时 $y=1$	
	(4)在 R 上是增函数	(4)在 R 上是减函数
	(5)x<0 时,0<y<1；x>0 时,y>1	(5)x<0 时,y>1； x>0 时,0<y<1

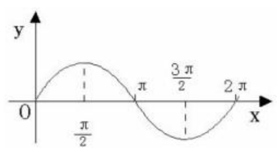
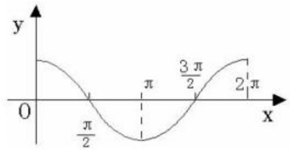
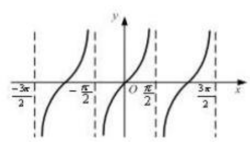
11.对数函数图象

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(1)定义域：$(0,+\infty)$	
	(2)值域：R	
	(3)过点 $(1,0)$，即当 $x=1$时，$y=0$	
	(4)在(0，+∞)上是增函数	(4)在 $(0,+\infty)$ 上是减函数
	(5)0〈x<1 时 y<0； x>1 时 y>0	(5)0〈x<1 时 y>0； x>1 时 y<0

12.几种幂函数 $y=x^a$ 的图象(分清 $a<0$；$a=0$；$0<a<1$；$a=1$；$a>1$)



13.正弦、余弦、正切函数的性质：

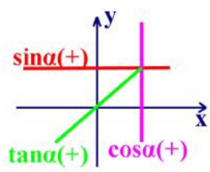
	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			

定义域	R	R	R
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$
最值	$x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$时，$y_{max}=1$ $x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in Z$时，$y_{min}=-1$	$x=2k\pi,k\in Z$时，$y_{max}=1$ $x=2k\pi+\pi,k\in Z$时，$y_{min}=-1$	无
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$
奇偶性	奇	偶	奇
单调性 $k\in Z$	在$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$上单调递增；在$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$上单调递减	在$[2k\pi-\pi,2k\pi]$上单调递增 在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$上单调递减	在$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$上单调递增
对称性 $k\in Z$	对称轴方程： $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 对称中心$(k\pi,0)$	对称轴方程：$x=k\pi$ 对称中心$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$	无对称轴 对称中心$(\frac{k\pi}{2},0)$

三、三角函数、三角恒等变换与解三角形

1.角度制与弧度制的互化：角度 $\xrightarrow{\div 180^0\times\pi}$ 弧度 $\xrightarrow{\div\pi\times 180^0}$ 角度

(1) $\pi=180^\circ$，$1^\circ=\frac{\pi}{180}$，1弧度$=(\frac{180}{\pi})^\circ\approx 57.3^0=57^\circ 18'$



(2)圆心角弧度：$|\alpha|=\frac{l}{R}$；扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}l\cdot R$

2.三角函数定义：角α终边上任一点(非原点)P(x,y),设$|OP|=r$

则：$\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x}$，三角函数符号由才字(如右图)

3.诱导公式记忆规律：“奇变偶不变，符号看象限”

4.特殊角的三角函数值

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0

5.同角三角函数的基本关系：$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$

6.两角和与差的正余弦，正切公式：

$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$；$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$；

$$\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{cases}$$

7.倍角公式：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$；

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

$\Rightarrow$**(降幂公式)** $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

8.辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$

($\frac{b}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$；$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$；$\frac{b}{a}=1\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$)

9.正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ($2R$ 是 ΔABC 外接圆直径)

边化角：$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$

角化边：$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$

11.余弦定理：在ΔABC中，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

推论：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

12.三角形面积公式： $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

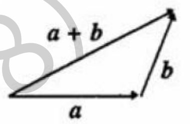
四、平面向量

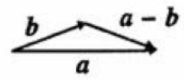
1.平面向量的坐标运算：设$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{a}=(x_2,y_2)$，

①$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$；②$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$；③$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y)$.

④ 设 A (x_1,y_1)，B (x_2,y_2)，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，

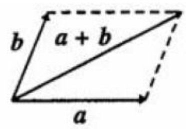
$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$





2.向量的三角形法则与平行四边形法则

(1)$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ (尾首接，首尾连)



(2)$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ (同起点，后向前)

3.重要性质：设$\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$

①证明垂直：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$

②证明平行：$\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

③求向量的模：$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2$

④求夹角：$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

⑤$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$；$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ (θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)

五、不等式

1.均值不等式(一正二定三相等)(积定和最小，和定积最大)

(1)若 a， $b\in R$，则 $a^2+b^2\geq 2ab$ (当且仅当 $a=b$ 时等号成立)

若 x， $y\in R^+$，则 $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (当且仅当 $x=y$ 时等号成立)

(2)若 a， $b\in R$，则 $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ (当且仅当 $a=b$ 时等号成立)

2.目标函数的类型：(判断 $Ax+By+C>0$ (或 <0)，观察 B 的符号与不等式开口的符号，同上异下，或代点计算)①“截距”型：$z=Ax+By$; ②“斜率”型：$z=\frac{y}{x}$ 或 $z=\frac{y-b}{x-a}$;

③“距离”型：$z=x^2+y^2$ 或 $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=(x-a)^2+(y-b)^2$ 或 $z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

六、数列

1.数列的通项公式与前 n 项的和的关系

$a_n=\begin{cases}s_1, & n=1\\ s_n-s_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$ (数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$)

2.等差数列的有关性质

(1)定义：$a_{n+1}-a_n=d$(常数)　　(2)通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$

(3)前 n 项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

(4)若 $m+n=p+q$，那么 $a_m+a_n=a_p+a_q$ (5)等差中项：2A=a+b；　$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$

(6) $\{a_n\}$ 等差数列,则 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k}$ 仍成等差

3.等比数列的有关性质

(1)定义：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数)　　(2)通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$

(3)前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$

(4)若 $m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$　(5)等比中项：$G^2=ab$；　$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$。

(6)等比数列 $\{a_n\}$，则 $S_k, S_{2k}-S_k, S_{3k}-S_{2k}$ 仍成等比数列。($q\neq-1$ 或 k 为奇数)

七、立体几何

1.三视图与直观图：注：原图形与直观图面积之比为 $2\sqrt{2}:1$。

2.表(侧)面积与体积公式：

(1)柱体：①表面积：$S=S_{侧}+2S_{底}$；②侧面积：$S_{侧}=2\pi rh$；③体积：$V=S_{底}h$

(2)锥体：①表面积：$S=S_{侧}+S_{底}$；②侧面积：$S_{侧}=\pi rl$；③体积：$V=\frac{1}{3}S_{底}h$；

(3)台体：①表面积：$S=S_{侧}+S_{上底}S_{下底}$；　②侧面积：$S_{侧}=\pi(r+r')l$；

③体积：$V=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$；

(4)球体：①表面积：$S=4\pi R^2$；②体积：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$。

3.位置关系的证明(主要方法)：

(1)直线与直线平行：①公理 4；②线面平行的性质定理；③面面平行的性质定理。

(2)直线与平面平行：①线面平行的判定定理；②面面平行$\Rightarrow$线面平行。

(3)平面与平面平行：①面面平行的判定定理及推论；②垂直于同一直线的两平面平行。

(4)直线与平面垂直：①直线与平面垂直的判定定理；②面面垂直的性质定理。

(5)平面与平面垂直：①定义-两平面所成二面角为直角；②面面垂直的判定定理。

注：理科还可用向量法。

4.求角：(步骤-I.找或作角；II.求角)

(1)异面直线所成角的求法：

①平移法：平移直线，构造三角形；

②补形法：补成正方体、平行六面体、长方体等，发现两条异面直线间的关系。

注：理科还可用向量法，转化为两直线方向向量的夹角。

(2)直线与平面所成的角：

①直接法(利用线面角定义)；②先求斜线上的点到平面距离 h，与斜线段长度作比，得 $\sin\theta$。

注：理科还可用向量法，转化为直线的方向向量与平面法向量的夹角。

5.结论：

(1) 长方体从一个顶点出发地三条棱长分别为 a，b，c，则对角线长为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，全面积为 2ab+2bc+2ca；

长方体体对角线与过同一顶点的三条棱所成的角分别为$\alpha,\beta,\gamma,$则：

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$；$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

(2) 正方体的棱长为 a，则对角线长为$\sqrt{3}a$，全面积为 $6a^2$，体积为 a^3

(3) 长方体或正方体的外接球直径 2R 等于长方体或正方体的对角线长；

(4) 正四面体的性质：设棱长为a，则正四面体的： @简单高中生

①高：$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$；②对棱间距离：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$；

②内切球半径：$\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$；外接球半径：$\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$；

八、解析几何

1.斜率公式：①$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$（其中两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）

②曲线 $y=f(x)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率 $k=f'(x_0)$.

2.直线的五种方程（一般两点斜截距）

(1)点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$（直线 l 过点 $P_1(x_1,y_1)$，且斜率为 k）.

(2)斜截式 $y=kx+b$ (b 为直线 l 在 y 轴上的截距).

(3)一般式 $Ax+By+C=0$ (其中 A、B 不同时为 0).

3.两条直线的平行和垂直

(1)若 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1\neq b_2$；②$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$

注意：利用斜率判断直线的平行与垂直时，要注意斜率的存在与否。

(2)若 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$,且 A_1.A_2.B_1.B_2 都不为零,

①$l_1//l_2 \Leftrightarrow A_1B_2=A_2B_1$且$B_1C_2\neq B_2C_1$；　②$l_1$ 和 l_2 相交 $\Leftrightarrow A_1B_2\neq A_2B_1$；

③l_1 和 l_2 重合 $\Leftrightarrow A_1B_2=A_2B_1$且$B_1C_2=B_2C_1$；　④$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

注：①与直线 $l: Ax+By+C=0$ 平行的直线可表示为 $Ax+By+C_1=0$；

②与直线 $l: Ax+By+C=0$ 垂直的直线可表示为 $Bx-Ay+C_1=0$；

4.距离公式

(1)平面两点间的距离公式：$d_{A,B}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ($A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$).

(2)点到直线的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$（点 $P(x_0,y_0)$,直线 l：$Ax+By+C=0$

(3)平行线 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_1=0$ 的距离公式 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

5.圆的方程

(1)标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心(a,b)；半径r

(2)一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ($D^2+E^2-4F>0$)，圆心$(\frac{D}{-2},\frac{E}{-2})$；半径

$r=\frac{\sqrt{D^2-E^2-4F}}{2}$

6.直线与圆的位置关系：直线$Ax+By+C=0$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$d>r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta<0$；　$d=r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta=0$；

$d<r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta>0$；弦长=$2\sqrt{r^2-d^2}$，其中$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

7.两圆位置关系：设两圆圆心分别为O_1，O_2，半径分别为r_1，r_2，$|O_1O_2|=d$

①$d>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4条公切线；

②$d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3条公切线

③$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2条公切线；

④$d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1条公切线；

⑤$0<d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线.

注：①圆的切线方程：过圆$x^2+y^2=r^2$上的$P_0(x_0,y_0)$点的切线方程为

$x_0x+y_0y=r^2$；

②圆上的动点到圆外的点或直线的最长距离($d+r$)或最短距离($d-r$)

8.椭圆的几何性质